Programme de colle n°1

semaine du 15 au 19 septembre

Notions vues en cours

Chapitre 1 : Logique et rédaction

- Assertion, connecteurs logiques (et, ou, non, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$), condition nécessaire, condition suffisante
- Quantificateurs : définition, passage à la négation, importance et signification de l'ordre des quantificateurs
- Raisonnements : par implications successives, **par contraposée**, par équivalences successives, par double implication, par la négation (notamment avec un contre-exemple), **par l'absurde**, **par récurrence** (simple, double, forte), par disjonction de cas, **par analyse-synthèse**
- Utilisation de l'analyse-synthèse pour résoudre des équations fonctionnelles, ou pour montrer l'existence et l'unicité d'une décomposition.
- Vu au chapitre 0 : expression en termes de quantificateurs pour exprimer l'unicité (sans forcément existence) d'un élément x dans un ensemble E qui vérifie l'assertion $P(x)$
- Vu aux chapitres 0 et 1 : règles de rédaction ("Soit", "Pour tout", "On pose", "Il existe", etc.), variables muettes

Chapitre 2 : Ensembles

- Définition intuitive d'ensemble et d'élément, ensembles usuels : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, ensemble vide $\varnothing$, intervalles élde $\mathbb{R}$, ensemble $[\![a, b]\!]$
- Notations $\{x \in E \mid P(x)\}$ et $\{f(x) \mid x \in E\}$ pour des ensembles (avec P un prédicat et f une fonction), singleton, ensemble fini ou infini
- Couple, n-uplet, produit cartésien d'ensembles, notations $A \times B$ et A^n
- Partie (ou sous-ensemble) d'un ensemble, caractérisations de l'inclusion et de l'égalité d'ensembles, raisonnement par double inclusion
- Ensemble des parties d'un ensemble E, notation $\mathscr{P}(E)$
- Opérations sur les ensembles : $\cup$, $\cap$, $\setminus$, passage au complémentaire. Propriétés élémentaires de ces opérations
- Ensembles disjoints, ensembles disjoints deux à deux, partition d'un ensemble (les sous-ensembles d'une partition doivent être non vides)
- Union et intersection d'un nombre infini d'ensembles (on se limite au cas dénombrable), notations $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ et $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, caractérisations de $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ et $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles de la page suivante (chapitres **1 et 2**).

Question Longue. *Pas de démonstration cette semaine SAUF avis contraire (le mot "démontrer" est alors mis en gras).*

Les questions sont en page suivante

1. Donner l'assertion qui correspond à la contraposée de $P \implies Q$. Donner les formules correspondant à non(non$P$), non(P et Q), non(P ou Q), P et (Q ou R), P ou (Q et R), non($P \implies Q$). Enfin, **démontrer** la formule concernant non($P \implies Q$) avec une table de vérité Chapitre 1, Théorème 1.8 et Théorème 1.13, la preuve a été faite en TD
2. Donner les caractérisations de $x \in A \cap B$, $x \in A \cup B$, $x \in A \setminus B$ et $x \in \overline{A}$. Donner les deux lois de Morgan et **démontrer** l'une des deux (celle de votre choix) Chapitre 2, Théorème 2.16, Théorème 2.17 (deux derniers items)
3. Notations : comment note-t-on l'ensemble des éléments de E qui vérifient un prédicat P ? Et l'ensemble des valeurs que prend une fonction f définie sur E ? Donner également pour chacun de ces ensembles une caractérisation pour qu'un élément y appartienne. Donner enfin les caractérisations de $E \subset F$, de $E = F$ et de l'appartenance à $\mathscr{P}(E)$ Chapitre 2, Définition 2.2 et 2.3, Théorèmes 2.11, 2.12 et 2.14

Questions Flash au programme :

Chapitre 1 :

- Soit P et Q deux assertions. Donner la négation de "$P \implies Q$".
- Soit P et Q deux assertions. Donner la négation de "P ou Q".
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Donner une caractérisation de "n est impair" en termes de quantificateurs.
- Donner la négation de l'assertion suivante : ... (au choix de l'examinateur).
- Qu'appelle-t-on la contraposée de l'assertion "$P \implies Q$" ?
- On souhaite montrer une assertion H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence double. Décrire ce qu'il faut démontrer pour l'initalisation et pour l'hérédité.
- Même question que ci-dessus pour la récurrence forte.
- Quel raisonnement utiliseriez-vous pour démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel ?

Chapitre 2 :

- Quels sont les éléments de $[\![-4, 2]\!]$? Et de $[-4, 2]$?
- Si $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi]$, que peut-on dire de a et de b ?
- Expliciter l'ensemble $\mathscr{P}(\{1, 2\})$, i.e. l'ensemble des parties de $\{1, 2\}$.
- Quelle est la caractérisation de $x \in A \cap B$? de $x \in A \cup B$?
- Compléter les formules suivantes : $\overline{A \cap B} = ...$ et $\overline{A \cup B} = ...$
- Sous quelle condition est-ce que des ensembles $A_1, \cdots, A_n$ sont-ils disjoints deux à deux ?
- Compléter : les ensembles $A_1, \cdots, A_n$ forment une partition de E si $A_1, \cdots, A_n$ sont .... , disjoints deux à deux et si ....